

DIJKSTRA

askisi

Το πρόβλημα της εύρεσης συντομότερων διαδρομών είναι ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία της ορομολόγησης πακέτων στο διαδίκτυο. Πρόκειται για το πρόβλημα όπου μας δίνεται ένας κατευθυνόμενος γράφος και μία κορυφή και ζητείται να βρεθεί η διαδρομή με το μικρότερο κόστος από την κορυφή αυτή προς όλες τις άλλες του γράφου.

Ο πιο συνηθισμένος αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα αυτό είναι ο αλγόριθμος του Dijkstra. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό:

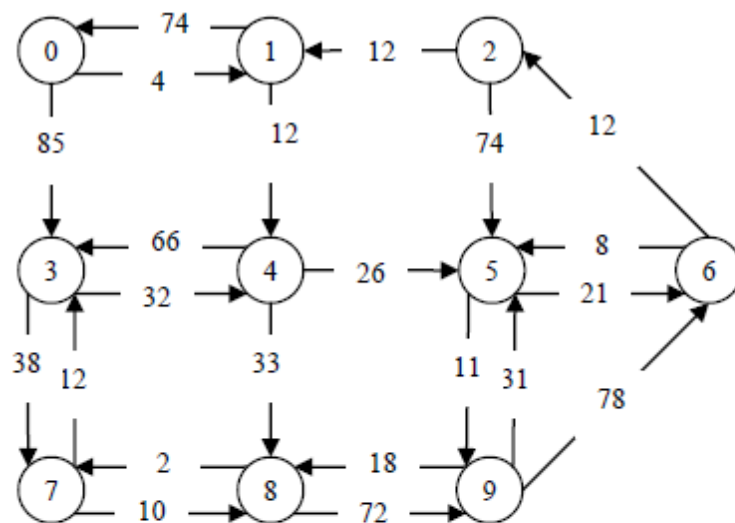
α) Ο αλγόριθμος διατηρεί έναν πίνακα d με το ελάχιστο βάρος της μέχρι κάθε στιγμή γνωστής διαδρομής για κάθε κορυφή. Αρχικά, το βάρος είναι μηδέν για την αρχική κορυφή και άπειρο για όλες τις άλλες (άπειρο σημαίνει ότι δεν υπάρχει διαδρομή).

β) Οι γειτονικές κορυφές της αρχικής παίρνουν βάρη ίσα με το βάρος της ακμής που τις συνδέει με την αρχική.

γ) Εξετάζονται όλες οι κορυφές που δεν έχουν εξεταστεί ακόμα. Επιλέγεται η κορυφή u που έχει το μικρότερο βάρος διαδρομής.

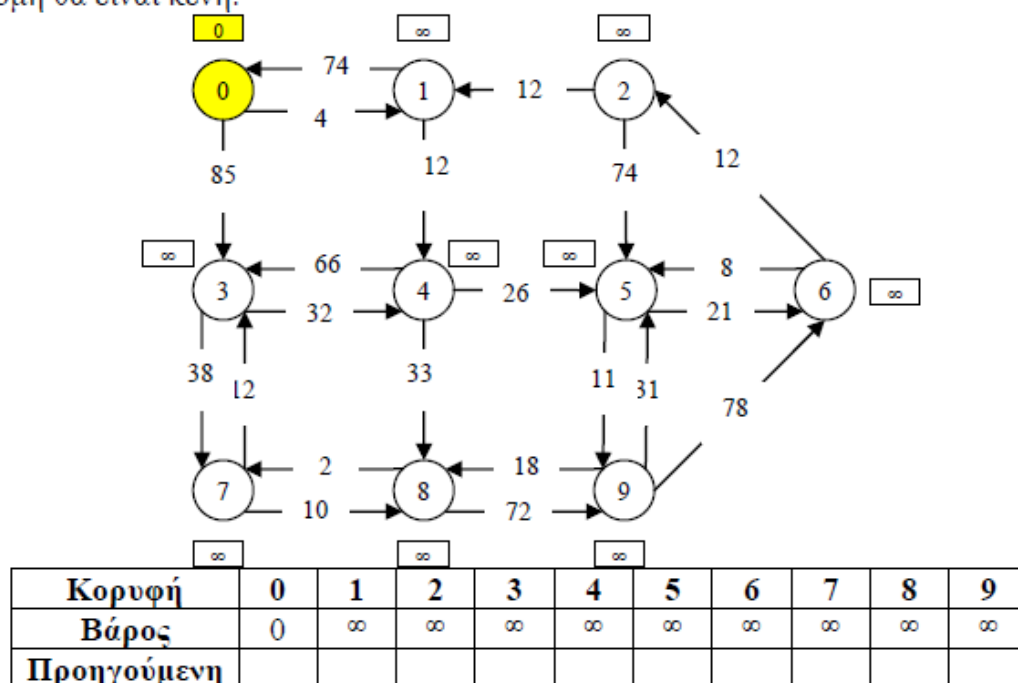
δ) Για κάθε μία από τις γειτονικές κορυφές v της κορυφής που επελέγη, εξετάζουμε αν η μέχρι στιγμής γνωστή καλύτερη διαδρομή μπορεί να βελτιωθεί με χρήση της νέας κορυφής. Δηλαδή εξετάζουμε αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$ όπου $w(u, v)$ το βάρος της ακμής $u-v$. Αν η διαδρομή βελτιώνεται, τότε θέτουμε στον πίνακα το βάρος της νέας διαδρομής για την κορυφή v και ενημερώνουμε κατάλληλη δομή για να κρατήσουμε τη διαδρομή μέσω της οποίας έχουμε τη μέχρι στιγμής καλύτερη διαδρομή (την προηγούμενη κορυφή).

ε) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα γ-δ έως ότου να εξετάσουμε όλες τις κορυφές. Τότε, ο αλγόριθμος τερματίζει.

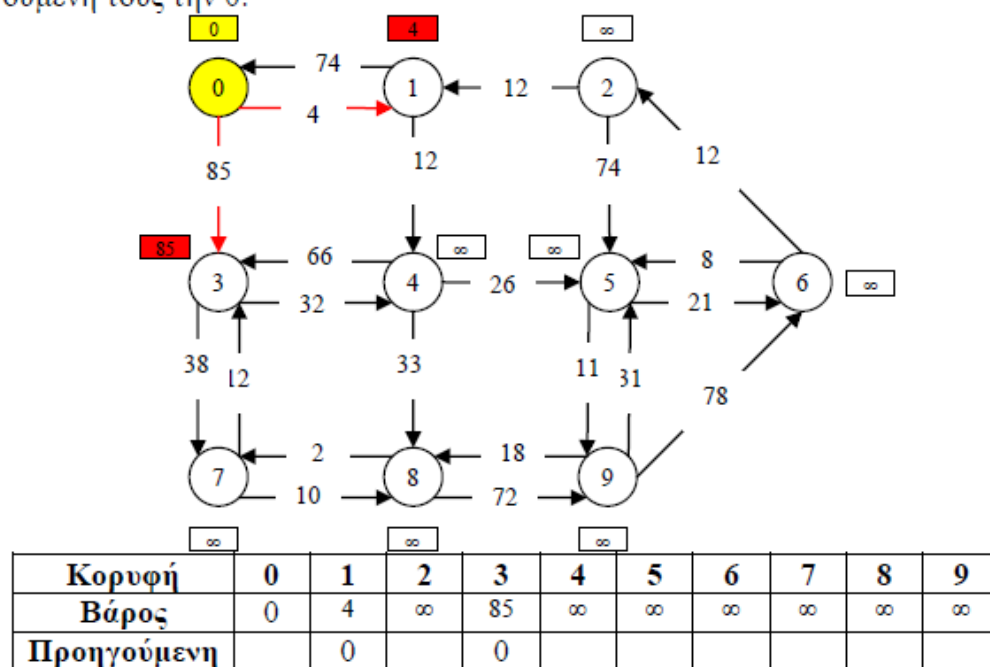


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	4	0	85	0	0	0	0	0	0
1	74	0	0	0	12	0	0	0	0	0
2	0	12	0	0	0	74	0	0	0	0
3	0	0	0	0	32	0	0	38	0	0
4	0	0	0	66	0	26	0	0	33	0
5	0	0	0	0	0	0	21	0	0	11
6	0	0	12	0	0	8	0	0	0	0
7	0	0	0	12	0	0	0	0	10	0
8	0	0	0	0	0	0	0	2	0	72
9	0	0	0	0	0	31	78	0	18	0

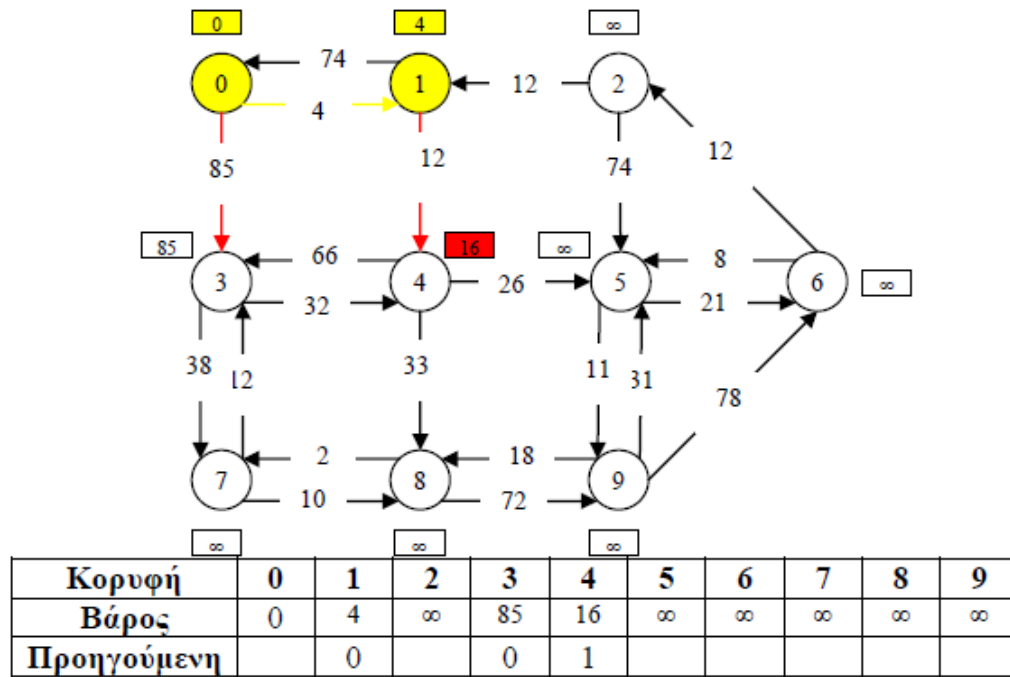
Ξεκινάμε από την κορυφή 0. Αρχικά, όλες οι κορυφές έχουν βάρος διαδρομής άπειρο, εκτός από την 0 που έχει βάρος 0. Επίσης, για κάθε κορυφή η προηγούμενή της στη διαδρομή θα είναι κενή.



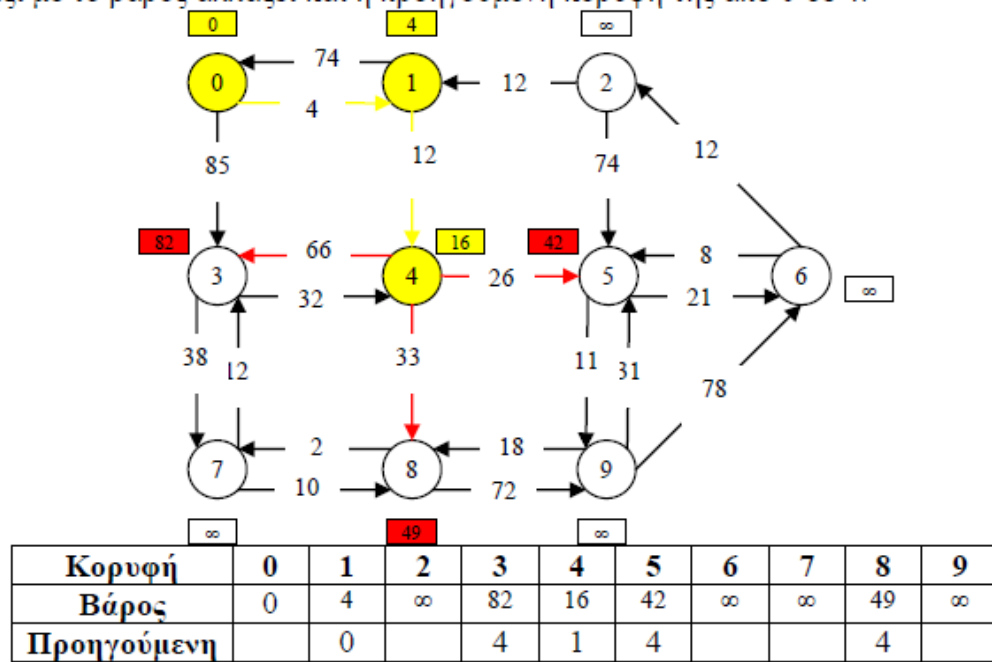
Στο πρώτο βήμα, ενημερώνουμε τα βάρη στις γειτονικές κορυφές της 0 και ορίζουμε ως προηγούμενή τους την 0.



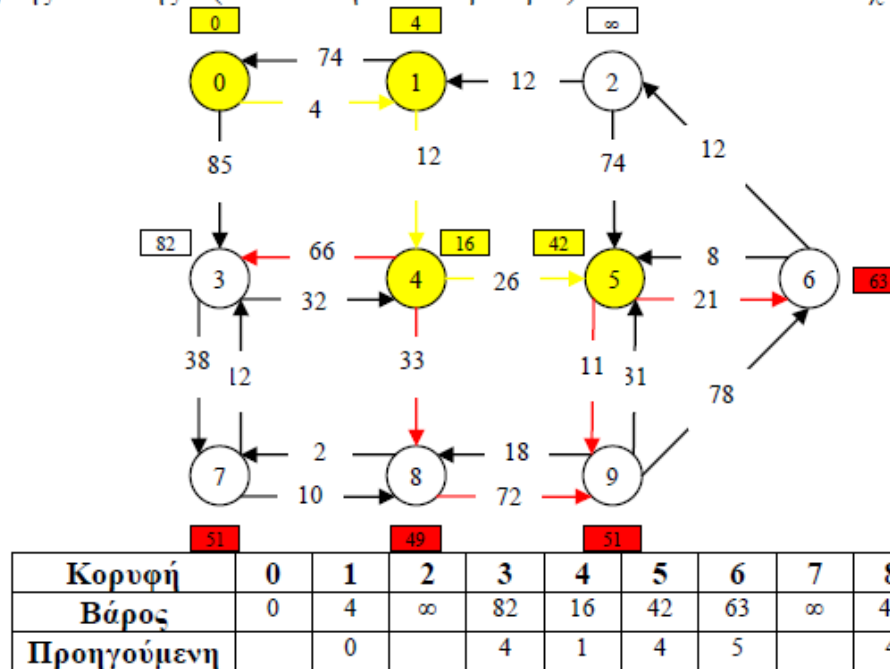
Επιλέγουμε την γειτονική κορυφή στην 0 με το μικρότερο βάρος. Αφού η κορυφή 1 έχει βάρος 4 και η 3 έχει βάρος 85, επιλέγουμε την κορυφή 1. Ενημερώνουμε τα βάρη των γειτονικών κορυφών στην 1 με το εξής κριτήριο: «Αν το βάρος που έχει ήδη η κορυφή είναι μεγαλύτερο από το βάρος της 1 συν το βάρος της ακμής που τις συνδέει, τότε το βάρος αλλάζει, αλλιώς μένει το ίδιο». Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα βάρη όλων των κορυφών είναι άπειρα, οπότε το βάρος αλλάζει. Έτσι, η κορυφή 4 αποκτά βάρος 16 (4+12) αντίστοιχα. Επίσης, η προηγούμενη κορυφή της τίθεται να είναι η 1.



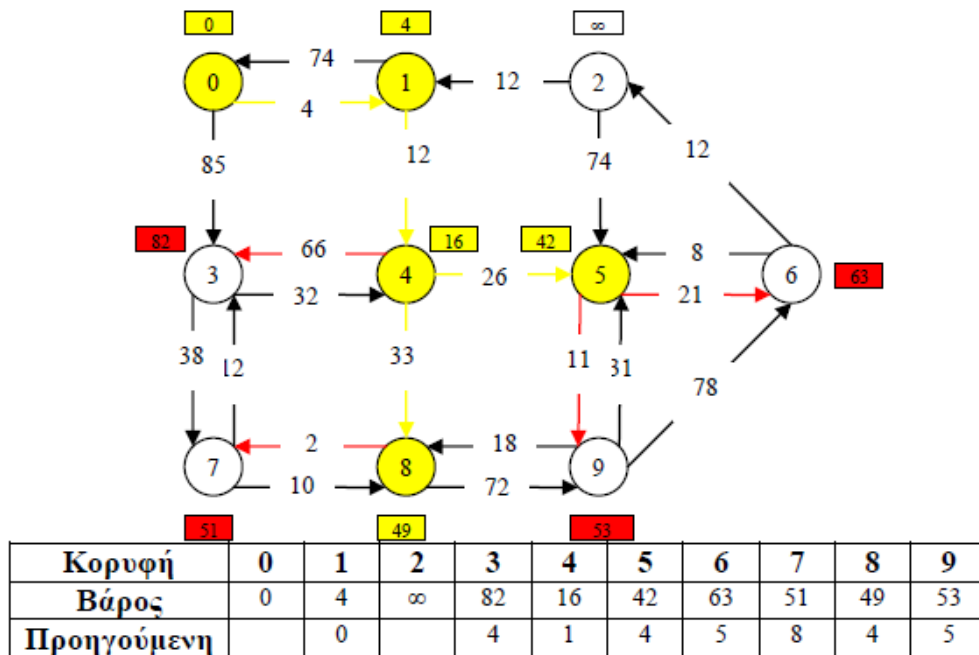
Η επόμενη κορυφή είναι η 4, αφού έχει βάρος 16 που είναι το μικρότερο από όλες αυτές που δεν έχουμε εξερευνήσει ακόμα. Γειτονικές της είναι οι 3, 5 και 8. Οι 8 και 5 έχουν άπειρο βάρος, οπότε το βάρος τους γίνεται ίσο με 49 ($16+33$) και 42 ($26+16$) αντίστοιχα. Η κορυφή 3 έχει βάρος $85 > 16+66=82$, οπότε αλλάζει και το βάρος αυτής. Προσέχουμε ότι μαζί με το βάρος αλλάζει και η προηγούμενη κορυφή της από 0 σε 4.



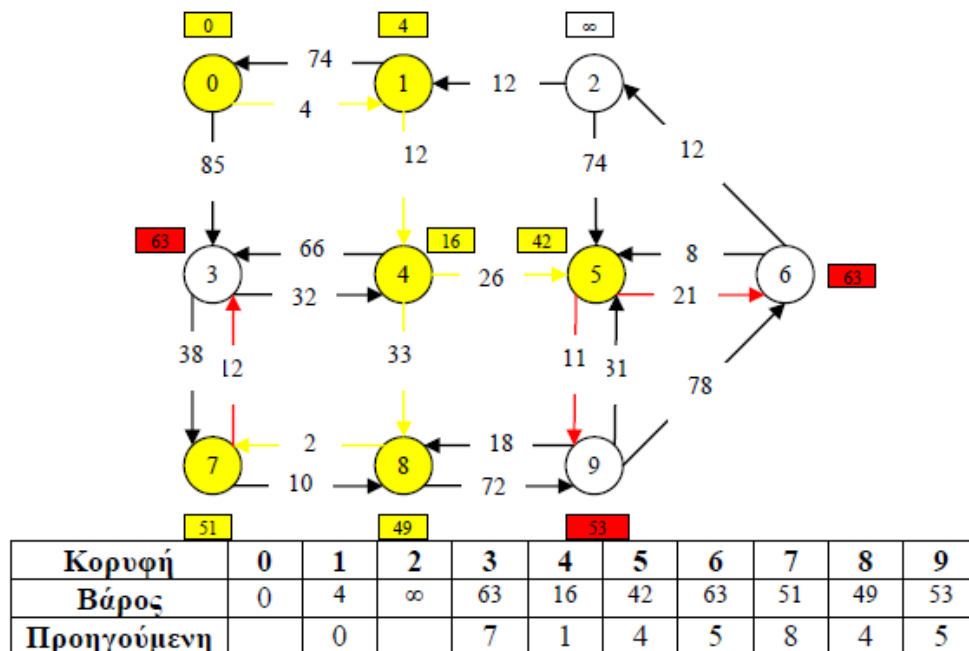
Επόμενη κορυφή είναι η 5, που έχει το μικρότερο βάρος (42). Αυτή τη φορά αλλάζει το βάρος της 6 και της 9 (το οποίο ήταν άπειρο πριν) σε 63 και 53 αντίστοιχα.



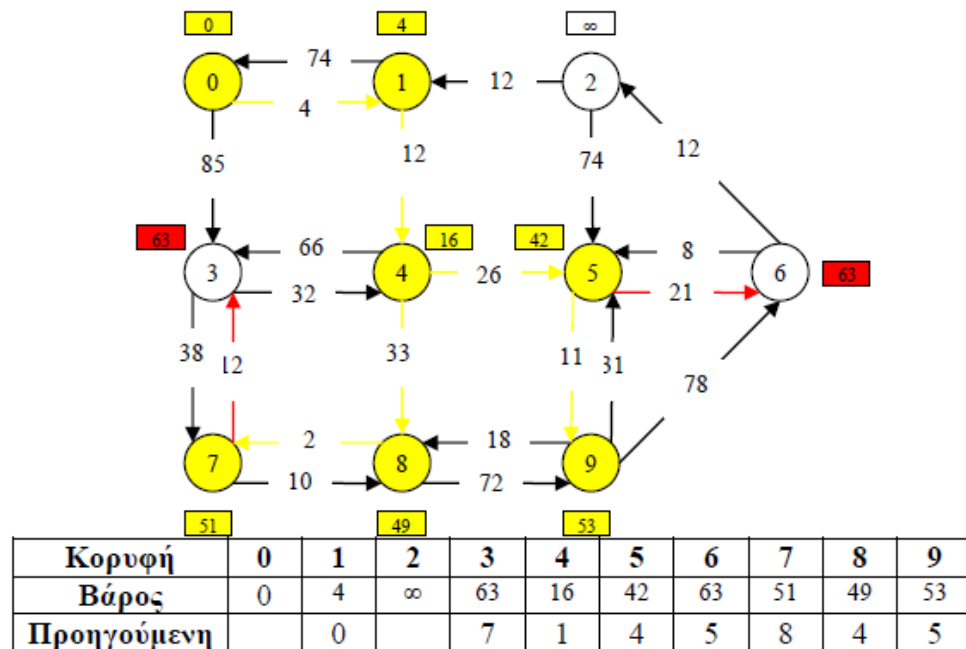
Επόμενη επιλογή είναι η 8, με βάρος 49. Γειτονική της είναι η 7, που έχει άπειρο βάρος. Το βάρος της επομένως γίνεται $49+2=51$ και προηγούμενή της γίνεται η 8. Η 9 είναι επίσης γειτονική της και έχει βάρος $53 < 49+72$. Επομένως, δεν θα πρέπει να αλλάξουμε και το βάρος της 9.



Επόμενη κορυφή είναι η 7 με βάρος 51. Η μόνη γειτονική της 7 είναι η 3. Το βάρος της 3 είναι 82 το οποίο είναι μεγαλύτερο από $51+12$, οπότε το βάρος της 3 αλλάζει σε 63, ενώ και η προηγούμενη κορυφή της γίνεται η 7.

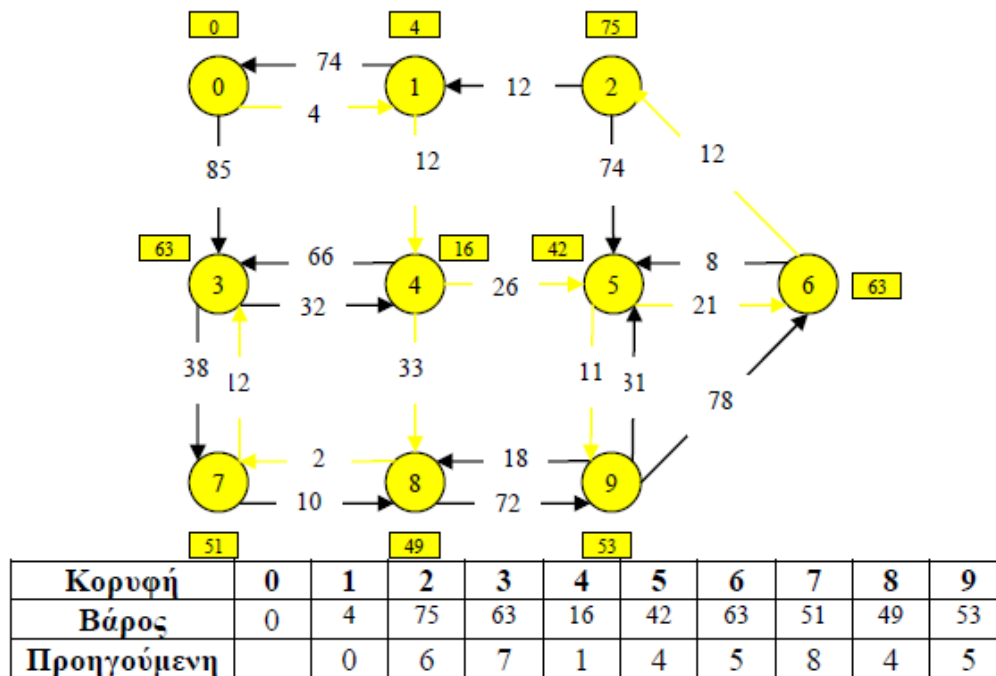


Η επόμενη μικρότερη κορυφή είναι η 9, με βάρος 53. Η 9 έχει γειτονική κορυφή την 8, την 5 και την 6. Από αυτές μόνο για την 6 δεν έχουμε υπολογίσει ελάχιστη διαδρομή αλλά το $63 < 53+78$, οπότε συνεχίζουμε χωρίς αλλαγές.

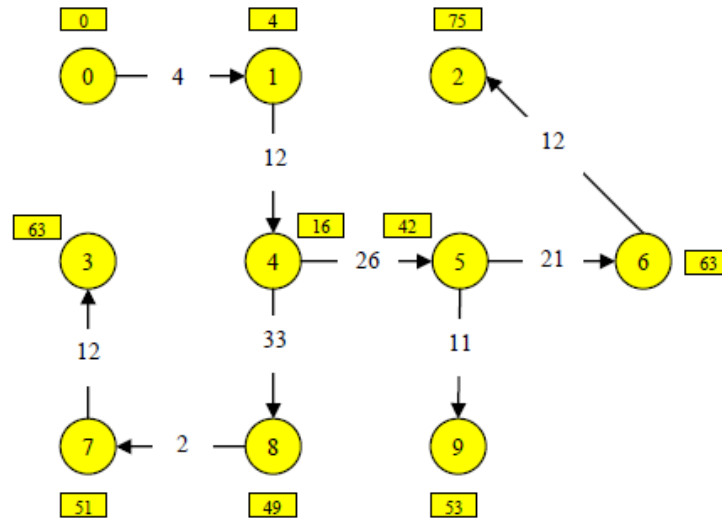


Η επόμενη επιλογή είναι μεταξύ των κορυφών 6 και 3 που έχουν βάρος 63. Η επιλογή που θα κάνουμε δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Αυθαίρετα επιλέγουμε την κορυφή 3. Η κορυφή αυτή δεν έχει γειτονικές κορυφές που δεν έχουν εξερευνηθεί, επομένως δεν επιφέρει καμία αλλαγή στο συνολικό σύστημα.

Επόμενη επιλογή μας θα είναι η 6, με βάρος 63. Η 6 έχει γειτονική της τη 2, η οποία έχει άπειρο βάρος. Έτσι, θέτουμε το βάρος της 2 ίσο με $63+12=75$. Στο σημείο αυτό μπορεί να τερματίσει ο αλγόριθμός μας, αφού δεν έχουν μείνει ανεξερευνητες κορυφές.



Άρα τελικά έχουμε τις συντομότερες διαδρομές από την κορυφή 0 προς τις υπόλοιπες κορυφές του γράφου, που απεικονίζονται στο παρακάτω δέντρο:



Ο ψευδοκώδικας που ακολουθεί περιγράφει τον αλγόριθμο του Dijkstra:

```

Δήλωση d[v]           //Πίνακας με τα βάρη
Δήλωση p[v]           //Πίνακας με τις προηγούμενες κορυφές

//Αρχικοποίηση
Για κάθε κορυφή v του γράφου:
    d[v]=infinity //Όλα τα βάρη άπειρα
    p[v]=-1       //Όλες οι προηγούμενες μη ορισμένες
v=start          //v=Αρχική κορυφή
d[v]=0
Όσο υπάρχουν ανεξερεύνητες κορυφές:
    Όρισε εξερευνημένη την κορυφή u με το μικρότερο βάρος.
    Για κάθε ακμή {u,v}:
        Αν d[v]>d[u]+w{u,v} τότε:
            d[v]= d[u]+w{u,v}
            p[v]= u

```